

# Simetria de uma figura e isometrias no plano

Formação de Professores  
Acompanhantes

Ana Boavida, Fernanda Matias, Margarida  
Rodrigues, Sílvia Machado

Tomar, 11/9/09

## Simetria: De que falamos?

Serão as mãos simétricas?

Será a nossa cara simétrica?

Serão os bonecos simétricos?



Afinal, de que falamos quando falamos em simetria?

## Simetria: De que falamos?

- A noção de simetria, sendo essencial em Matemática, não é exclusiva deste campo

*Simetria é uma ideia que o homem tem usado ao longo dos tempos para tentar compreender e criar ordem, beleza e perfeição.*  
(Serra, 1993, p. 304, cit. Weyl)

*A noção de simetria é deveras importante em Matemática, nas artes visuais e em diversas ciências como a Cristalografia e a Física.* (Oliveira, 1997, p. 70)

- Em geometria, simetria define-se em termos de isometrias

Quando a imagem de uma figura, através de uma isometria diferente da identidade, coincide com a figura original, então a figura tem simetria. (Serra, 1993)

## Simetria: Estabilizando um significado


- Falar de simetria é falar de **simetria de uma figura**.

Figura: um subconjunto de pontos do plano ou do espaço. Exs: Recta, rectângulo, esfera, desenho artístico,...

(Bastos, 2006)

- Não tem sentido perguntar se as duas bonecas (duas figuras) são simétricas...



... embora possa perguntar-se se a boneca  (uma figura) tem simetria.

## Simetria de uma figura: Estabilizando um significado

### Focando-nos nas figuras do plano

- Simetria de uma figura não é o mesmo que simetria axial de uma figura: a figura pode ter simetrias que não sejam axiais

*Simetria de uma figura  $F$  é uma isometria  $T$  do plano que deixa a figura invariante, isto é, tal que  $T(F) = F$ . (Bastos, 2006, p. 11)*

- Invariante significa globalmente invariante

*Podem alguns ou todos os pontos da figura mudar de posição, mas a figura, como um todo, fica invariante. (Veloso, 1998, p. 182)*

- Manutenção da congruência e da posição

O transformado da figura através da isometria coincide com a figura original: as figuras são geometricamente iguais e além disso ocupam a mesma posição no plano, mesmo que haja pontos que não coincidam com as suas imagens.

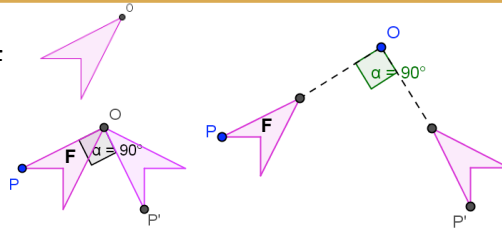
## Revisitando isometrias a propósito de simetria

- Analisar a simetria de uma figura remete para investigar se há **isometrias** (diferentes da identidade) que a deixam invariante
- Isometria: Transformação geométrica que preserva as distâncias, transformando figuras noutras geometricamente iguais.
- Quatro tipos fundamentais de isometrias:
  - Rotação
  - Translação
  - Reflexão
  - Reflexão deslizante

## Revisitando isometrias a propósito de simetria

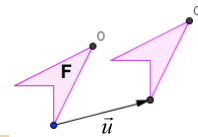
Considere-se a figura  $F$

- **Rotação** de centro  $O$  e amplitude  $90^\circ$



Rotação de centro  $O$  e amplitude  $\alpha$  é uma transformação geométrica tal que: (1) qualquer que seja o ponto  $P$  do plano, a distância de  $O$  a  $P$  é igual à distância de  $O$  a  $P'$  (imagem de  $P$ ); (2) a amplitude do ângulo orientado definido por  $P$ ,  $O$  e  $P'$  é igual a  $\alpha$ .

- **Translação** associada ao vector  $\vec{u}$

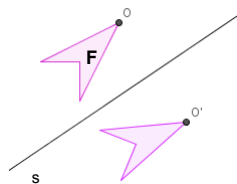


Dado um vector  $\vec{u}$  chama-se translação definida por este vector a uma transformação geométrica, tal que cada ponto  $O$  do plano é transformado num ponto  $O' = O + \vec{u}$

## Revisitando isometrias a propósito de simetria

Considere-se a figura  $F$

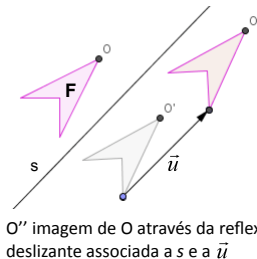
- **Reflexão** de eixo  $s$



Reflexão de eixo  $s$  é a transformação geométrica que faz corresponder a cada ponto  $O$  do plano o ponto  $O'$  (imagem de  $O$ ) de tal modo que a recta  $s$  é a mediatriz do segmento  $[O O']$ ; se  $O$  pertence a  $s$ , a sua imagem coincide com  $O$ .

- **Reflexão deslizante**

Transformação geométrica resultante da composição de uma reflexão de eixo  $s$  com uma translação cujo vector tem direcção paralela a  $s$



$O''$  imagem de  $O$  através da reflexão deslizante associada a  $s$  e a  $\vec{u}$

## Retomando a ideia de simetria de uma figura

*De entre as aplicações mais interessantes das transformações e grupos de transformações estão as relacionadas com questões de simetria. Existindo muitas espécies de simetrias no plano e no espaço (...).* (Oliveira, 1996, p. 187)

*Há uma simetria para cada um dos quatro tipos de isometrias referidos.* (Serra, 1993, p. 305)

- Simetria de reflexão (ou simetria axial)
- Simetria de rotação (ou simetria rotacional)
- Simetria de translação
- Simetria de reflexão deslizante

## Simetria de reflexão de uma figura

**Existe, pelo menos, uma reflexão que deixa a figura globalmente invariante**

Como a reconhecemos? Várias hipóteses...

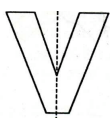
- Se conseguirmos dobrar a figura de tal modo que as duas partes obtidas se sobreponham exactamente;
- Se conseguirmos colocar um espelho ou mira sobre a figura de modo a que a junção da parte reflectida com a não reflectida seja exactamente igual à figura toda;
- Se recortarmos a figura e conseguirmos preencher exactamente o buraco que fica na folha com a parte recortada mas virada ao contrário (com a parte de baixo do papel virada para cima);
- ...



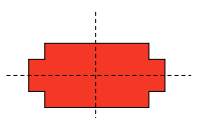
## Simetria de reflexão de uma figura

- A simetria de reflexão também se designa por *simetria axial*; o eixo de reflexão também se designa por *eixo de simetria* ou *linha de simetria*. (Serra, 1993, p. 305)

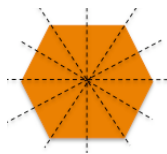
### Eixo de simetria?



1 eixo de simetria



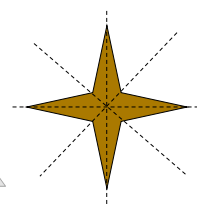
2 eixos de simetria



6 eixos de simetria

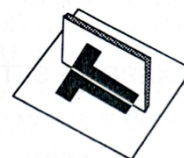


0 eixos de simetria



4 eixos de simetria

**Eixo de simetria de uma figura:** Recta (sobre a qual se faz a dobra ou se coloca o espelho/mira...) que divide a figura ao meio de modo a que uma metade da figura seja a reflexão da outra metade. Caso contrário, a recta não é eixo de simetria.

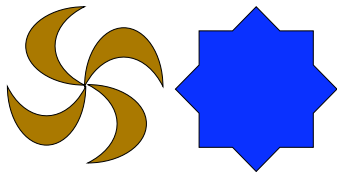


## Simetria rotacional de uma figura

Existe, pelo menos, uma rotação com uma amplitude superior a  $0^\circ$  e inferior a  $360^\circ$  que deixa a figura globalmente invariante. Só neste caso se admite também uma simetria rotacional associada a um ângulo de  $360^\circ$ .

Como a reconhecemos?

Se conseguirmos girar a figura em torno de um ponto fixo, de modo a que a imagem resultante, através da rotação, coincida com a figura original.



Figuras com simetria rotacional

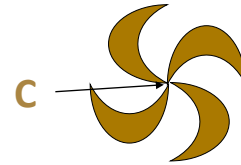


Figura sem simetria rotacional

## Simetria rotacional de uma figura

Que simetrias rotacionais tem a figura?

**C: Centro da simetria rotacional**  
(ponto em torno do qual a figura roda)



**Ângulo da simetria rotacional:** ângulo orientado que descreve o “movimento” da figura.

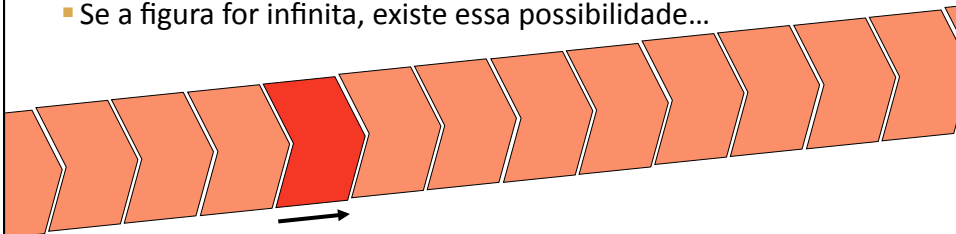


## Simetria de translação de uma figura

**Existe, pelo menos, uma translação que deixa a figura globalmente invariante**

Como a reconhecemos?

- Se podemos movimentar a figura segundo uma dada distância e uma dada direcção (identificadas pelo vector da translação) de tal modo que o seu transformado coincide com a figura original
- Se a figura for infinita, existe essa possibilidade...

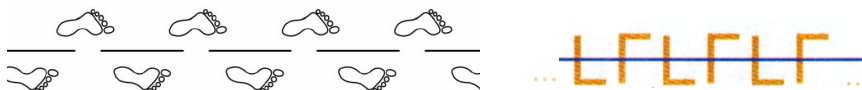


## Simetria de reflexão deslizante de uma figura

Existe, pelo menos, uma reflexão deslizante que deixa a figura globalmente invariante

Como a reconhecemos?

- Se, por exemplo, depois de desenharmos a figura em papel transparente, de virarmos o papel ao contrário “em torno” de uma determinada recta e de o deslocarmos um pouco segundo a direcção dessa recta, conseguirmos que o transformado da figura coincida com a figura original.
- Se a figura for infinita, existe essa possibilidade...



## Em busca de simetrias de figuras

### Potencialidades

*O estudo das simetrias das figuras constitui uma aplicação muito interessante das isometrias que permite desenvolver o conhecimento matemático destas transformações geométricas e fornecer, conseqüentemente, ferramentas que podem ser muito úteis na resolução de problemas geométricos.*

(...)

*O conceito de simetria pode ser também a base para actividades de descrição e classificação de figuras geométricas, de argumentação/demonstração*

(...)

*A análise de objectos artísticos ou de cristais através das suas simetrias são actividades que estabelecem ligações entre a matemática e outros domínios do saber (...)*

(Bastos, 2006, p. 11)



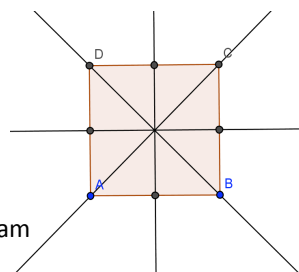
## Simetrias de polígonos

### Que simetrias existem num quadrado?

#### ▪ Simetrias axiais

4

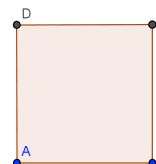
Eixos de simetria: 2 rectas que contêm as diagonais do quadrado e 2 rectas que passam pelos pontos médios de lados opostos



#### ▪ Simetrias rotacionais

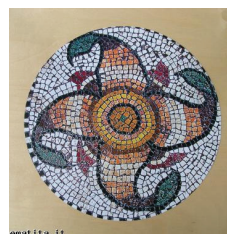
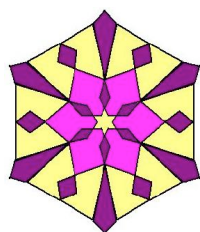
4

Com centro no ponto de encontro das diagonais do quadrado e amplitudes  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  e  $360^\circ$ .



## Simetrias na arte decorativa: o caso das rosáceas

### Exemplos de rosáceas

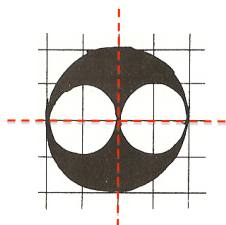


### Rosáceas

- Figuras, compostas por diversos módulos geometricamente iguais que se repetem, por rotação (sempre com a mesma amplitude e em torno de um mesmo ponto).
- Existe sempre um ponto do plano que é fixo para o grupo de simetria da figura (conjunto das transformações de simetria da figura).
- Têm sempre simetrias rotacionais, podendo ter também simetrias de reflexão.

## Simetrias na arte decorativa: o caso das rosáceas

Que simetrias existem nestas rosáceas?



• assinala o centro de rotação

- Simetria de reflexão e simetria rotacional
  - Simetria de reflexão  
2 eixos de simetria – lado/lado
  - Simetria rotacional  
R rotação de  $180^0$   
R<sup>2</sup> rotação de  $360^0$  (identidade)
- Só simetria rotacional
  - R rotação de  $60^0$
  - R<sup>2</sup> rotação de  $120^0$
  - R<sup>3</sup> rotação de  $180^0$
  - R<sup>4</sup> rotação de  $240^0$
  - R<sup>5</sup> rotação de  $300^0$
  - R<sup>6</sup> rotação de  $360^0$  (identidade)

## Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

Exemplos de frisos



As barras cinzentas ou os motivos incompletos, indicam que a figura se prolonga indefinidamente para a esquerda e para a direita

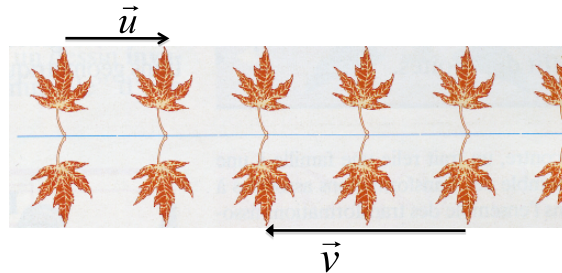
Friso

- Figura infinita caracterizada por apresentar sempre simetrias de translação com a mesma direcção.
- No friso, o grupo de simetria fixa uma recta.
- Pode haver outras simetrias para além das de translação

## Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

Que simetrias existem neste friso?

Identificar

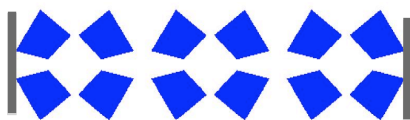


- De translação. Por exemplo, translações associadas aos vectores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .
- De reflexão de eixo horizontal

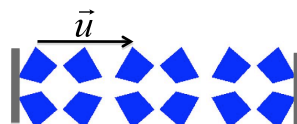
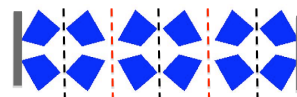
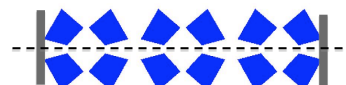
## Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

Que simetrias existem neste friso?

Identificar



- De reflexão de eixo horizontal
- De reflexão de eixos verticais
- De translação da figura associadas a vectores com a direcção de  $\vec{u}$  e comprimento múltiplo do deste vector.

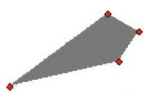
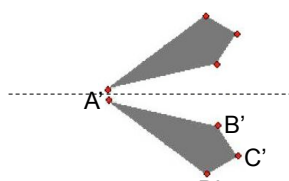


## Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

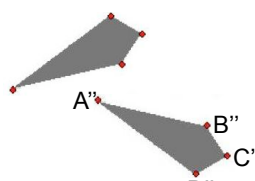
A partir de um motivo simples  
podem-se construir frisos muito  
diversos usando isometrias

Construir

Motivo simples

$[A', B', C', D']$  imagem do  
motivo através de uma  
reflexão de eixo horizontal

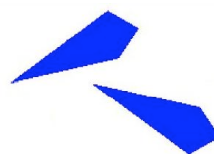


$[A'', B'', C'', D'']$  imagem de  
 $[A', B', C', D']$  através de  
uma translação de vector  
paralelo ao eixo de reflexão

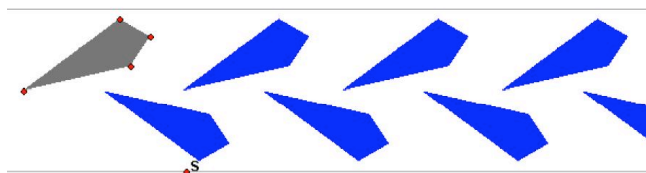
## Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

Construir (continuação)

Através de translações sucessivas da figura



Obtém-se o friso



Simetrias do friso: de translação e de reflexão deslizante

## Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

### Que tipos de frisos há?

#### Investigar

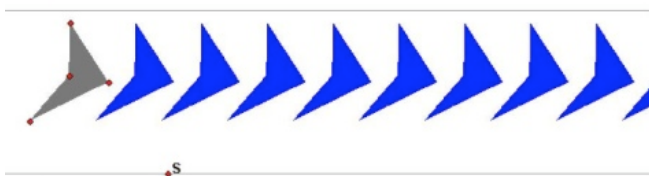
*Investigar que tipos de frisos existem (...) [é] perceber que “estruturas” de frisos existem e, para isso, devemos investigar que grupos de simetria podem ter os frisos (...) [trata-se] de procurar uma classificação dos frisos baseada nos respectivos grupos de simetria. (Veloso, 1998, p. 202)*

### Há apenas sete tipos de frisos

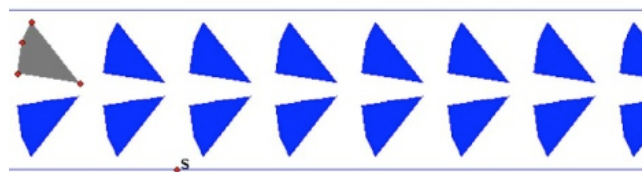
## Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

### Sete tipos de frisos

#### Investigar



Tipo 1: gerado por translação

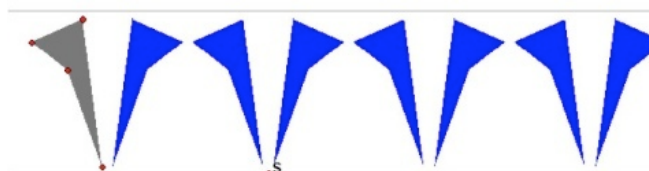


Tipo 2: gerado por reflexão de eixo horizontal e translação

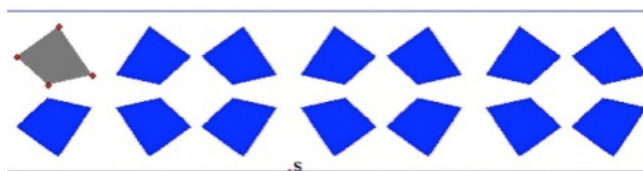
## Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

### Sete tipos de frisos

### Investigar



Tipo 3: gerado por reflexão de eixo vertical e translação



Tipo 4: gerado por reflexão de eixo horizontal, reflexão de eixo vertical e translação

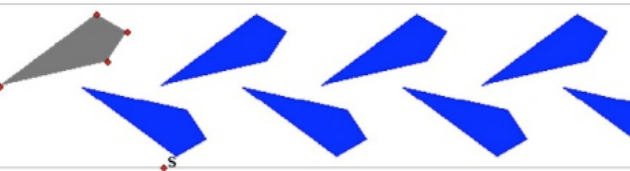
## Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

### Sete tipos de frisos

### Investigar



Tipo 5: gerado por rotação de  $180^\circ$  e translação

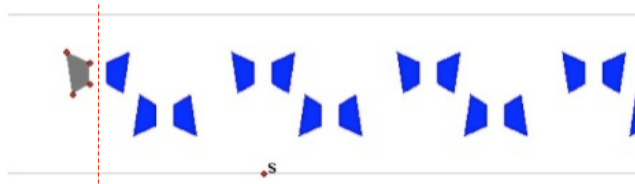


Tipo 6: gerado por reflexão deslizante e translação

## Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

### Sete tipos de frisos

### Investigar



Tipo 7: gerado por reflexão de eixo vertical (ou rotação de  $180^\circ$ ), reflexão deslizante e translação

## Bibliografia e outros materiais consultados

- Bastos, R. (2006). Notas sobre o Ensino da Geometria do Grupo de Trabalho de Geometria da APM – Simetria. *Educação Matemática*, 88, 9-11.
- Bastos, R. (2007). Notas sobre o ensino da Geometria: Transformações geométricas. *Educação e Matemática*, 94, 23-27.
- Deledicq, A. & Raba, R. (1997). *Le monde des pavages*. Paris: ACL- Éditions.
- Devlin, K. (2002). *Matemática: A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.
- Hargittai, I. & Hargittai, M. (1994). *Symmetry: A unifying concept*. Bolinas, California: Shelter Publications.
- Haylock, D. (2001). *Mathematics explained for primary teachers*. London: Sage.
- Musser, G., Burger, W. (1997). *Mathematics for elementary teachers: A contemporary approach* (4ª ed.). Upper Saddle River: Prentice-Hall.
- Oliveira, A. (1997). *Transformações geométricas*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Serra, M. (1993). *Discovering geometry: An inductive approach*. Berkeley: Key Curriculum Press.

## Bibliografia e outros materiais consultados

Veloso, E., Bastos, R. & Figueirinhas, S. (2009). Notas para o ensino da Geometria: isometrias e simetria com materiais manipuláveis. *Educação e Matemática*, 101, 23-28.

Veloso, E. (1998). *Geometria. Temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional

### Documentos não publicados

*Transformações geométricas e simetrias de uma figura* (texto produzido pelas equipas do Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1º e 2º ciclos da ESE de Setúbal)

Conjunto de slides sobre *Simetria e frisos* elaborados pela equipa do Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1º e 2º ciclos da Universidade de Évora (2008/2009).

### Sites

[http://www.apm.pt/formacao/tgs\\_2008/index.html](http://www.apm.pt/formacao/tgs_2008/index.html)

<http://www.atm.org.uk/resources/>

<http://www.atractor.pt/simetria/matematica/index.html>

<http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=168>

[http://mathstitch.com/Rosettes\\_Friezes\\_and\\_Wallp.html](http://mathstitch.com/Rosettes_Friezes_and_Wallp.html)